

# Anwendung von Filtern bei der Auswertung gemessener Oberflächenprofile

## Application of Filters in the Evaluation of Measured Surface Profiles

Michael Hernla, Dortmund

Manuskripteingang: 8. August 1999; zur Veröffentlichung angenommen: 13. Dezember 1999

Bei der Auswertung von Oberflächenmessungen werden heute verschiedene Tiefpassfilter mit festgelegten Grenzwellenlängen eingesetzt. Das Splinefilter bietet dabei gegenüber dem Gaußfilter deutliche Vorteile. Mit beiden Filtern werden aber nicht nur zufällige, sondern auch systematische Anteile der Messwerte abgeschnitten, so dass wesentliche Informationen verloren gehen können. Die Alternative ist ein iteratives Filterverfahren, bei dem die abgeschnittenen Restabweichungen auf ihren Zufallscharakter getestet werden. Die tiefpassgefilterte Oberfläche ist der Ausgangspunkt zur Berechnung formidealer Geometrielemente, für die dann auch die Messunsicherheiten angegeben werden können.

Various low-pass filters with fixed cut-off wavelengths are used commonly for the evaluation of surface measurements. The spline filter features advantages over the Gaussian filter. With both filters, however, systematic errors of the surface are cut off and important information may be lost. An iterative filtering procedure is proposed here where the cut-off parts of the variations are tested for their random characteristics. Based on the low-pass filtered surface the ideal geometric features can be calculated together with the uncertainty of the measurements.

**Schlagwörter:** Oberflächenmessung, Filter, zufällige Restabweichungen, Geometrielemente, Messunsicherheit

## 1 Einleitung

In der Oberflächenmesstechnik werden Filter bei der Rauheits-, Welligkeits- und Formmessung eingesetzt. Sie erfüllen zwei wesentliche Aufgaben [1; 2; 3]:

### 1. Definition von Oberflächenkenngrößen

Bei Rauheit und Welligkeit definieren Hochpassfilter die mittlere Linie als Bezugsprofil, und Tiefpassfilter grenzen die Welligkeit gegenüber der Rauheit ab.

### 2. Abtrennung zufälliger Messwertanteile

Tiefpassfilter sollen bei der Formmessung und bei der Rauheitsmessung (unerwünschte) zufällige Messwertanteile abtrennen, die als Rauschen die Messergebnisse verfälschen.

In der Vergangenheit wurden entsprechend dem verfügbaren Stand der Technik phasenkorrekte RC-Filter eingesetzt, während heute das Gaußfilter in ISO 11562 [3] international genormt ist. Eine Alternative dazu stellt das Splinefilter [4; 5] dar. Im Folgenden sollen zunächst die Eigenschaften dieser beiden Filter diskutiert werden. Daran schließen sich

Beispiele für ihre Anwendung bei der Messung von Form-, Lage- und Maßabweichungen von Oberflächen sowie eine Messunsicherheitsbetrachtung an.

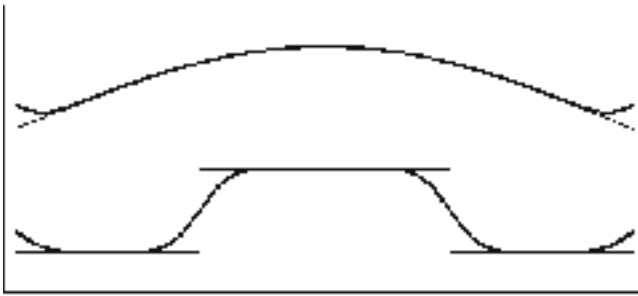
## 2 Gaußfilter

Das Gaußfilter wird durch die Gewichtsfunktion

$$S(x) = \frac{1}{\alpha\lambda_c} e^{-\pi\left(\frac{x}{\alpha\lambda_c}\right)^2} \quad \text{mit } \alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}} \quad (1)$$

beschrieben [3]. Dabei sind  $x$  der Abstand des Messwertes von der Mitte der Gewichtsfunktion und  $\lambda_c$  die Grenzwellenlänge. Für die Messung der Formabweichung von Oberflächen ist das Tiefpassfilter mit  $\lambda_c = 0,8 \text{ mm}$  z.B. in [6] genormt.

Das Integral über die Gewichtsfunktion ergibt den Wert 1. Das tiefpassgefilterte Signal  $y(x)$  erhält man aus dem Messsignal  $f(x)$  durch Faltung mit der Gewichtsfunktion:



**Bild 1:** Testfunktionen (Sinushalbwellen und Rechteckfunktionen) und ohne Vor- und Nachlaufstrecken mit dem Gaußfilter tiefpassgefilterte mittlere Profile (Messlänge 4 mm,  $\lambda_c = 0,8$  mm).

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\tau) f(x - \tau) d\tau \quad (2)$$

Allerdings treten an den Enden des Messbereichs Verzerrungen des gefilterten Profils auf, die Vor- und Nachlaufstrecken erforderlich machen [5], siehe Bild 1. Die abgetastete Länge muss deshalb an jedem Ende um  $0,7 \lambda_c$  länger sein als die zur Auswertung benutzte Messstrecke [7]. Leider wird in ISO 11562 [3] auf dieses Problem nicht einmal hingewiesen.

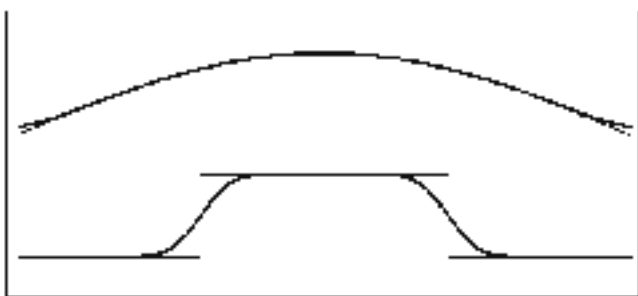
Um ohne Vor- und Nachlaufstrecken auszukommen, wird in [8] vorgeschlagen, anstelle der unendlichen Integrationsgrenzen der Gewichtsfunktion die tatsächlichen Grenzen  $x_1$  und  $x_2$  des Messbereiches zu berücksichtigen. Dazu wird das Integral nach Gleichung (2) um Gewichte  $g(x)$  für die einzelnen Messwerte  $f(x)$  korrigiert:

$$y(x) = \frac{1}{g(x)} \int_{x-\tau \geq x_1}^{x+\tau \leq x_2} S(\tau) f(x - \tau) d\tau$$

mit

$$g(x) = \int_{x-\tau \geq x_1}^{x+\tau \leq x_2} S(\tau) d\tau \quad (3)$$

Die Gewichte  $g(x)$  erhält man als Integral über die Gewichtsfunktion innerhalb des Messbereiches. Sie betragen in der Mitte 1 und verringern sich an den Enden bis auf 0,5. Mit dieser Korrektur werden die Profilverzerrungen an den Enden zwar deutlich reduziert, jedoch nicht vollständig beseitigt, wenn der Anstieg des Messsignals  $f(x)$  von null



**Bild 2:** Testfunktionen (Sinushalbwellen und Rechteckfunktionen) und ohne Vor- und Nachlaufstrecken mit dem korrigierten Gaußfilter tiefpassgefilterte mittlere Profile (Messlänge 4 mm,  $\lambda_c = 0,8$  mm).

verschieden ist. Der grundsätzliche Nachteil des Gaußfilters lässt sich damit also nur verringern.

Damit sind gleichzeitig auch die Einsatzmöglichkeiten der Formmessung begrenzt. Die Vor- und Nachlaufstrecke nimmt am Anfang und Ende jeweils einen Teil der abgetasteten Oberfläche in Anspruch, so dass diese für die Auswertung verloren gehen. Das ist im klassischen Maschinenbau in der Regel kein Problem, sicher jedoch bei Werkstückabmessungen von weniger als 1 mm wie in der Uhrenindustrie und der Mikrosystemtechnik. Der Anspruch auf Allgemeingültigkeit der Normen kann so nicht erfüllt werden.

### 3 Splinefilter

Natürliche kubische Splines eignen sich gut zur Approximation von unsicheren Messwerten durch möglichst glatte Funktionen [4; 5; 9]. Die Splinefunktion  $S$  ist in jedem Intervall  $[x_k, x_{k+1}]$  durch das kubische Polynom  $s_k(x)$  gegeben:

$$s_k(x) = a_k + b_k(x - x_k) + c_k(x - x_k)^2 + d_k(x - x_k)^3 \quad (4)$$

mit

$$k = 1 \dots n - 1, \quad x_k \leq x \leq x_{k+1}$$

und

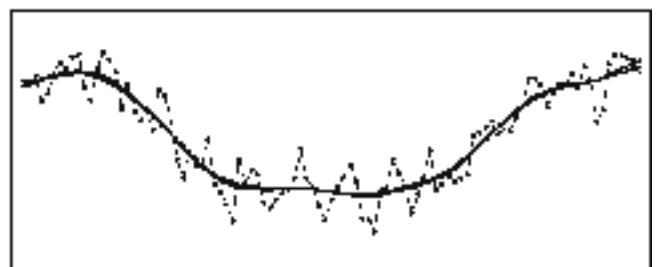
$$s_n(x) = a_n$$

Die Berechnung der Splinefunktion ist im Anhang beschrieben. Durch Vorgabe der Grenzwellenlänge  $\lambda_c$  lässt sich das Splinefilter auch zur Filterung von Messwerten einsetzen. Es hat gegenüber dem Gaußfilter den wesentlichen Vorteil, dass es keine Profilverzerrung an den Enden gibt. Vor- und Nachlaufstrecken sind damit unnötig.

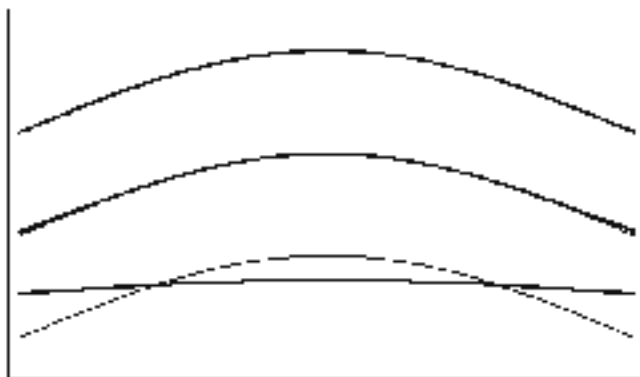
Weiterhin ist die im Anhang angegebene Lösung für ungleichabständige Messpunkte geeignet, ohne dass dabei der Rechenaufwand gegenüber gleichabständigen wesentlich ansteigt. Das ist ein zweiter wesentlicher Vorteil.

Beide Filter haben bei gleicher Wellenlänge etwa dieselbe Wirkung, d.h. die tiefpassgefilterten Profile liegen eng beieinander. Das Bild 3 zeigt ein Beispiel. Die Differenzen zwischen den beiden Profilen an den Rändern gehen ähnlich wie im Bild 1 auf die unvollständige Korrektur beim Gaußfilter zurück.

Auch beim Splinefilter wird eine Sinusfunktion, deren Wellenlänge  $\lambda$  gleich der Grenzwellenlänge  $\lambda_c$  ist, zu



**Bild 3:** Oberflächenmesswerte mit den tiefpassgefilterten mittleren Profilen (Messlänge 4 mm,  $\lambda_c = 0,8$  mm); Gaußfilter und Splinefilter.



**Bild 4:** Testfunktion Sinushalbwellen mit Messlänge 4 mm, gefiltert mit Splinefiltern und den Grenzwellenlängen  $\lambda_c = 0,8 / 2,5 / 8$  mm (von oben nach unten).

50 % der Amplitude übertragen. Funktionen mit kleineren Wellenlängen werden stärker gedämpft, die mit größeren weniger stark. Für eine Oberfläche mit großen Formabweichungen wandert also das tiefpassgefilterte Profil mit wachsender Grenzwellenlänge immer weiter von den Messwerten weg, bis sich schließlich die Ausgleichsgerade ergibt, siehe Bild 4.

Derselbe Effekt tritt ein, wenn bei der festgelegten Grenzwellenlänge  $\lambda_c = 0,8$  mm die Messlänge und damit die Wellenlängen der Abweichungen kleiner werden. Auch mit dem Splinefilter lassen sich also Werkstücke mit Abmessungen unter etwa 1 mm nicht mehr messen, da die kurzwelligen Abweichungen durch den Tiefpass abgeschnitten werden.

## 4 Einsatzgrenzen der Filter

Sowohl das Gauß- als auch das Splinefilter sind durch die festgelegte Grenzwellenlänge für kleine Werkstücke nicht einsetzbar. Bei sehr großen Werkstücken gibt es aber ebenfalls klare Grenzen. Mit dem Abtasttheorem ergibt sich ein maximaler Messpunktabstand von etwa  $\Delta x = \lambda_c / 5 = 0,16$  mm. Unter Umständen sind damit sehr große Datenmengen zu erfassen und zu verarbeiten, z.B. bei Messlängen von 10 m im Großmaschinenbau rund 60 000 Messpunkte. Abgesehen davon, dass dazu gar keine geeigneten Messeinrichtungen zur Verfügung stehen, ist der Informationsgehalt zumindest zweifelhaft. So reichen zur Bestimmung der Geradheitsabweichung einer Führung häufig etwa 10 bis 20 Messwerte in gleichmäßigem Abstand aus. Als Messeinrichtungen haben sich seit langem Richtwaage und Laserinterferometer mit entsprechenden Zusatzeinrichtungen (Messbrücken) bewährt.

Auch bei Koordinatenmessgeräten werden in der Regel nur relativ wenige Punkte der Oberfläche angetastet. Nur ein verschwindend kleiner Anteil der heute eingesetzten Messgeräte gestattet die Erfassung großer Datenmengen in akzeptabler Zeit. Der Mehrheit der Anwender wird das sog. High-Speed-Scanning jedoch schon aus Kostengründen auf absehbare Zeit unzugänglich bleiben. Die am häufigsten eingesetzten handgeführten Geräte sind weder zur Erfas-

sung großer Messpunktzahlen noch zur Einhaltung gleichmäßiger Messpunktabstände geeignet. Letzteres ist jedoch die wesentliche Voraussetzung zur numerischen Faltung, so dass hier die Messwerte nur mit Zusatzmaßnahmen gefiltert werden können [8; 10].

Die Festlegung einer festen Grenzwellenlänge für alle Formmessungen wird diesen Anwendungsfällen nicht gerecht und ist deshalb für die Praxis nicht geeignet. Im folgenden Abschnitt wird eine Auswertemethode vorgestellt, die bei allen Oberflächenmessungen anwendbar ist.

## 5 Methode zur Auswertung gemessener Oberflächenprofile

Die ursprüngliche Idee beim Einsatz von Filtern war die Abtrennung störender zufälliger Messwertanteile. Das tiefpassgefilterte Profil wird als Approximation des wirklichen Oberflächenprofils angesehen und ausgewertet. Der abgetrennte Anteil der Messwerte wird als Zufallsanteil betrachtet, ohne zu untersuchen, ob das tatsächlich der Fall ist. Üblicherweise ist das auch gar nicht möglich, da dieser Anteil durch die Filterung verloren geht und für weitere Betrachtungen nicht zur Verfügung steht. Dann gibt es keine Möglichkeit mehr, darin enthaltene systematische Anteile zu identifizieren, und wichtige Informationen über die Oberfläche können verloren gehen.

Die Zufälligkeit der abgeschnittenen Messwertanteile lässt sich mit statistischen Tests prüfen. Zahlenfolgen heißen zufällig, wenn ihre Werte  $z_i$  unabhängig von den vorangegangenen und den nachfolgenden Werten sind. Die Werte müssen unkorreliert sein; sie sind unabhängig, wenn sie zusätzlich normalverteilt sind. Als Korrelationsmaße sind die Prüfgrößen  $\xi_1$  und  $\xi_2$  mit ihren kritischen Werten aus DIN 1319-4 [11] sowie der Korrelationskoeffizient  $r$  für benachbarte Werte [12] bekannt:

$$\xi_1 = \frac{1}{u^2} \sum_{i=2}^n z_{i-1} z_i \quad (5)$$

mit

$$|\xi_1| \leq k \sqrt{n-p}, \quad k = 2$$

und

$$u^2 = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n z_i^2$$

$$\xi_2 = \sum_{i=2}^n \text{sgn}(z_{i-1}) \text{sgn}(z_i) \quad (6)$$

mit

$$|\xi_2| \leq k \sqrt{n-p} \quad \text{und} \quad k = 2$$

$$r = \frac{1}{S} \sum_{i=2}^n z_{i-1} z_i \quad \text{mit} \quad S = \sum_{i=1}^n z_i^2 \quad (7)$$

Dabei sind jeweils  $n$  die Anzahl der Messwerte,  $p$  die Anzahl der Ergebnisgrößen und die  $z_i$  die Abweichungen der Messwerte vom mittleren Profil. Der Nenner  $u^2$  in Glei-

chung (5) ist der Schätzwert für die globale Varianz der Messwerte [11].

Die Ähnlichkeit von Gleichung (5) und (7) ist auffällig; sie unterscheiden sich nur durch den Faktor  $n-p$ . Bei Gleichung (6) handelt es sich um einen Vorzeichenstest. Weisen nebeneinanderliegende Funktionswerte über größere Bereiche gleiche Vorzeichen auf, so sind sie miteinander korreliert, was auf systematische Anteile in den Werten hinweist. Die Testgröße

$$t = r \sqrt{\frac{n-p}{1-r^2}} \tag{8}$$

gehört einer Studentverteilung mit  $n-p$  Freiheitsgraden [13]. Daraus lässt sich der Zufallshöchstwert  $r_{zm}$  des Korrelationskoeffizienten ableiten:

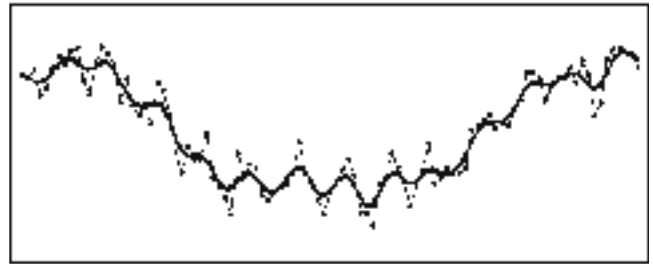
$$r_{zm} = \frac{t}{\sqrt{n-p+t^2}} \tag{9}$$

Für  $t$  ist bei einem gewünschten zweiseitigen Vertrauensniveau von  $P = 1 - \alpha = 95\%$  das Quantil  $t_{1-\alpha/2, n-p}$  der  $t$ -Verteilung für die  $n-p$  Freiheitsgrade einzusetzen. Der Korrelationskoeffizient  $r$  ist eine Zufallsgröße, wenn sein Betrag maximal gleich dem Zufallshöchstwert  $r_{zm}$  ist.

Die Anwendung der Tests soll anhand der Beispiele aus Bild 3 demonstriert werden. Nach gängiger Auffassung der Normen [1; 6] werden die hochpassgefilterten Anteile als zufällige betrachtet. Die Restabweichungen der Messpunkte vom mittleren Profil zeigen jedoch deutlich zusammenhängende Bereiche mit gleichen Vorzeichen, was schon ein deutliches Zeichen für nicht zufällige, also systematische Anteile ist. Die Prüfgrößen bestätigen diese Vermutung, siehe Tabelle 1. Sie sind in jedem Fall größer als die kritischen Werte.

Will man den tatsächlichen Zufallsanteil erhalten, ist eine geeignete Funktion zu finden, die den mittleren Verlauf der Messwerte möglichst gut approximiert [11]. Handelt es sich um periodische Abweichungen, wird in [9] die Fourieranalyse empfohlen. Beispiele wurden bereits in [14–17] angegeben.

Eine andere Möglichkeit ist die Verwendung der Gauß- bzw. Splinefilter mit variablen Wellenlängen. Sie wird solange verringert, bis die Prüfgrößen kleiner als ihre kritischen Werte sind, und z.B. der Korrelationskoeffizient



**Bild 5:** Oberflächenmesswerte aus Bild 3 mit den tiefpassgefilterten mittleren Profilen für unkorrelierte Restabweichungen ( $r = 0$ ); Gaußfilter mit  $\lambda_c = 0,27$  mm und Splinefilter mit  $\lambda_c = 0,30$  mm.

$r = 0$  wird (Tabelle 1). Im Bild 5 sind die so eingepassten mittleren Profile dargestellt. Die Differenzen der Profile und ihrer Reststreuungen sind praktisch vernachlässigbar.

Der wesentliche Vorteil der beschriebenen Methode der schrittweisen Annäherung an die Grenzwellenlänge, die die zufälligen und die systematischen Messwertanteile voneinander trennt, ist ihre Objektivität. Das Ergebnis hängt allein von den tatsächlich vorliegenden Messwerten ab und nicht von willkürlich gewählten oder festgelegten Messlängen bzw. Grenzwellenlängen. Die Reststreuung der zufälligen und unabhängigen Meßwertanteile kann gleichzeitig zur richtigen Abschätzung der Messunsicherheit verwendet werden [14; 17].

## 6 Messunsicherheit des mittleren Profils

Für das gefilterte Profil und die davon abgeleiteten Messgrößen müssen die Messunsicherheiten angegeben werden können. Die Standardunsicherheit  $u_G$  des mit dem Gaußfilter tiefpassgefilterten Profils beträgt nach [7]:

$$u_G = u(z) \sqrt{\frac{\Delta x}{\alpha \lambda_c \sqrt{2}}} \tag{10}$$

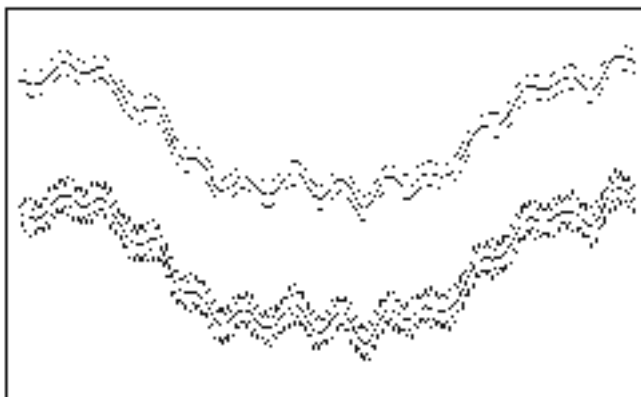
mit

$$\alpha = \sqrt{\frac{\ln 2}{\pi}}$$

Dabei ist  $u(z)$  die Messunsicherheit der Eingangsgrößen, also der Messwerte. In [7] bleibt jedoch offen, wie sie ermittelt wird. Eine Möglichkeit ist die Abschätzung als Standardabweichung  $s_r$  der oben beschriebenen zufälligen

**Tabelle 1:** Prüfgrößen  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  und  $r$  sowie kritische Werte für die Bilder 3 (Filterung mit der Grenzwellenlänge  $\lambda_c = 0,8$  mm) und 5 (schrittweise Filterung mit Korrelationskoeffizient  $r = 0$ ); mit Reststreuungen  $s_r$ .

	Prüfgröße	Kritischer Wert	Bild 3: $\lambda_c = 0,8$	Bild 5: $r = 0$
Gaußfilter	$\xi_1$	20	36	0
	$\xi_2$	20	34	10
	$r$	0,195	0,356	0
	$s_r$	–	0,0058	0,0042
Splinefilter	$\xi_1$	20	32	0
	$\xi_2$	20	30	6
	$r$	0,198	0,326	0
	$s_r$	–	0,0057	0,0040



**Bild 6:** Tiefpassgefilterte mittlere Profile aus Bild 5 mit Vertrauensbereichen; oben Gaußfilter, unten Splinefilter.

und unabhängigen Restabweichungen  $\delta_k$  der Messwerte. Diese ergeben sich als Differenzen zwischen den Messwerten und dem mittleren Profil und enthalten die Streuung der Messeinrichtung, aber auch einen Streuungsanteil der Oberfläche infolge der diskreten Abtastung mit dem Abstand  $\Delta x$ . Der Verlauf der Oberfläche wird so nicht vollständig erfasst. Je dichter aber die Messpunkte liegen, desto kleiner wird dieser Anteil, und die Reststreuung nähert sich an die Streuung der Messeinrichtung an. Die Reststreuung wird abgeschätzt mit:

$$u(z) = s_r = \sqrt{\frac{1}{n-p} \sum_{k=1}^n \delta_k^2} \quad (11)$$

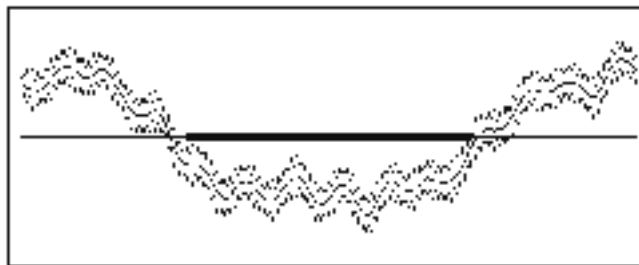
Die Anzahl der freien Parameter wird  $p = 1$  gesetzt, da die Summe der Gewichtungsfaktoren des tiefpassgefilterten Profils bei der numerischen Faltung eins beträgt.

Für das Splinefilter ist die Berechnung der Standardunsicherheit  $u_{sk}(x)$  an einer beliebigen Stelle  $x$  im Anhang angegeben. Die Reststreuung  $s_r$  wird auch hier nach Gleichung (11) abgeschätzt. Da an jeder Messstelle vier Splinekoeffizienten berechnet werden, beträgt die Anzahl der freien Parameter hier  $p = 4$ .

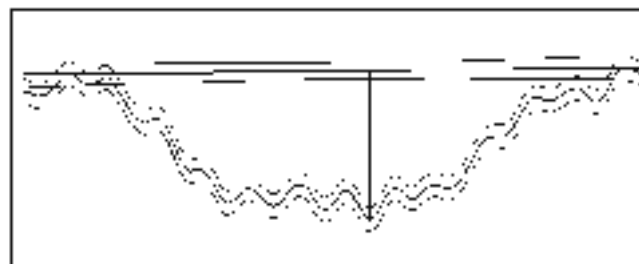
Die erweiterten Unsicherheiten  $U_G$  bzw.  $U_{sk}(x)$  für ein Vertrauensniveau von etwa 95 % erhält man in beiden Fällen durch Multiplikation der Standardunsicherheit mit dem Erweiterungsfaktor  $k = 2$  [18]. Die Vertrauensbereiche der mittleren Profile aus Bild 5 sind im Bild 6 dargestellt. Sie liegen jeweils in der gleichen Größenordnung und sind deutlich größer als die Differenzen zwischen den beiden mittleren Profilen im Bild 5.

## 7 Berechnung von Geometrieelementen

In ISO 14660-1 [19] werden verschiedene Arten von Geometrieelementen definiert, nämlich das wirkliche, das erfasste und das zugeordnete. Das erfasste Geometrieelement ist eine angenäherte Darstellung des wirklichen Geometrieelementes, die man durch das Erfassen einer begrenzten Anzahl von Punkten nach festgelegten Vereinbarungen erhält. Solche Vereinbarungen können z.B. Filter mit vorge-



**Bild 7:** Mit Splinefilter tiefpassgefiltertes mittleres Profil aus Bild 5 bzw. 6 und mittlere Gerade mit Vertrauensbereich.



**Bild 8:** Mit Gaußfilter tiefpassgefiltertes mittleres Profil aus Bild 5 bzw. 6 und angrenzende Gerade mit Vertrauensbereich.

gebenen Grenzwellenlängen (Bild 3) oder das Kriterium unkorrelierter Restabweichungen (Bild 5) sein.

Das zugeordnete Geometrieelement ist ein Element von idealer Form, das dem erfassten Element wieder nach festgelegten Vereinbarungen zugeordnet wird. Solche Vereinbarungen sind z.B. die mittlere Gerade nach Gauß für das Minimum der Abstandsquadrate (Bild 7) oder die am mittleren Profil angrenzende Gerade (Bild 8). Die Messunsicherheit ist ein Maß für die Güte der Profilapproximation bzw. die Genauigkeit der zugeordneten Geometrieelemente.

Im Gegensatz dazu kann in der Regel keine Messunsicherheit bestimmt werden, wenn man anstelle der mittleren Profile die Messpunkte selbst als erfasstes Geometrieelement betrachtet. Es gibt dann weder ein mittleres Profil noch entsprechende Restabweichungen. Wird aber z.B. die Unsicherheit aus den Abweichungen der Messpunkte zur mittleren Geraden abgeschätzt, so ist sie in der Regel zu groß. In [14] und [17] wurde bereits gezeigt, dass sich die Messunsicherheit allein mit der Streuung der zufälligen Restabweichungen richtig abschätzen lässt.

Die Gleichung der mittleren Geraden durch alle Messpunkte  $(x_i, y_i)$  lautet allgemein, bezogen auf den Schwerpunkt  $(\bar{x}, \bar{y})$  der Messpunkte:

$$y = m(x - \bar{x}) + b \quad (12)$$

mit

$$m = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})y_i}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad b = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

und

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Ihre Standardunsicherheit  $u(y)$  ergibt sich durch Anwendung des Fortpflanzungsgesetzes auf die unsicheren Messwerte  $y_i$ . Dabei wird deren Standardabweichung  $\sigma_y$  durch die Reststreuung  $s_r$  der zufälligen Restabweichungen abgeschätzt:

$$u(y) = s_r \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2}} \quad (13)$$

Die Reststreuung  $s_r$  der zufälligen Restabweichungen erhält man wieder aus Gleichung (11) mit  $p=2$  für die beiden Parameter  $m$  und  $b$  in Gleichung (12). Die Gleichung (13) beschreibt eine Hyperbel, deren schmalste Stelle im Schwerpunkt der Messpunkte liegt.

Die angrenzende Gerade liegt an zwei Punkten des mittleren Profils an, deren Unsicherheiten  $u_1$  und  $u_2$  bekannt sind. Hier lautet die Unsicherheit [14]:

$$u(y) = \sqrt{u_0^2 + (x - x_0)^2 u_m^2} \quad (14)$$

mit

$$u_0^2 = \frac{u_1^2 + u_2^2}{4},$$

$$u_m^2 = \frac{(x_1 - x_0)^2 u_1^2 + (x_2 - x_0)^2 u_2^2}{[(x_1 - x_0)^2 + (x_2 - x_0)^2]^2}$$

und

$$x_0 = \frac{x_1 u_1^2 + x_2 u_2^2}{u_1^2 + u_2^2}$$

Die Koordinate  $x_0$  kann als der mit den Unsicherheiten gewichtete Schwerpunkt der Geraden aufgefasst werden. Er liegt in der Mitte zwischen den beiden Punkten, wenn  $u_1$  und  $u_2$  gleich groß sind.

Die erweiterten Messunsicherheiten für das Vertrauensniveau 95 % erhält man in allen Fällen durch Multiplikation der Standardunsicherheiten mit dem Erweiterungsfaktor  $k=2$  [18].

Nach dem beschriebenen Vorgehen lassen sich auch alle denkbaren anderen Geometrielemente berechnen. Ist eine Sollgeometrie bekannt oder vorgegeben, kann zunächst diese als Ausgleichselement in die Messpunkte eingepasst werden. Die verbleibenden Restabweichungen sind auf Korrelation zu testen. Sind sie unkorreliert, so stellen die Ausgleichselemente schon die erfassten Geometrielemente dar. Sind die Restabweichungen dagegen korreliert, enthalten sie noch systematische Anteile, die durch geeignete Funktionen zu approximieren sind. Die Messunsicherheit wird in jedem Fall mit den unkorrelierten Restabweichungen abgeschätzt.

In [9] werden neben verschiedenen Arten von Splines weitere Funktionsansätze angegeben, die sich auch zur Beschreibung von räumlichen Flächen eignen. Damit lassen sich auch ungleichabständige Messwerte verarbeiten. So können nicht nur einfache geometrische Elemente wie Gerade, Kreis, Ebene und Zylinder mit ihren Abweichungen ausgewertet werden, sondern auch komplizierte wie Zahn-

**Tabelle 2:** Formabweichungen  $F$  und erweiterte Messunsicherheiten  $U$  für die mittleren Profile aus den Bildern 7 und 8 (Werte in  $\mu\text{m}$ ) sowie für die Messwerte.

	Mittlere Gerade		Angrenzende Gerade	
	$F_M$	$U_M$	$F_A$	$U_A$
Gaußfilter	49,3	5,6	48,4	4,8
Splinefilter	50,2	5,0	49,1	4,4
Messwerte	58,1	–	58,0	–

flanken oder Schraubenflächen. Bei der Messung kommt es lediglich darauf an, dass das Auflösungsvermögen der Messeinrichtung, die Taster und die Dichte der Messpunkte überhaupt zur Erfassung der gesuchten Merkmale bzw. Oberflächeneigenschaften geeignet sind.

## 8 Formabweichungen

Sind die erfassten und die zugeordneten Geometrielemente mit ihren Messunsicherheiten bekannt, so können sofort die Formabweichungen mit ihren Unsicherheiten angegeben werden. In den Bildern 7 und 8 sind sowohl für die mittlere als auch für die angrenzende Gerade die Stellen mit den extremen Abweichungen durch senkrechte Striche markiert. Die Unsicherheit der Formabweichung ergibt sich jeweils aus den Anteilen des mittleren Profils und des zugeordneten Elementes an diesen Stellen. Die Werte sind in Tabelle 2 zusammengestellt.

Zum Vergleich sind die Formabweichungen der Messwerte zur mittleren und zur angrenzenden Geraden angegeben. Sie sind deutlich größer, ohne dass sich eine Unsicherheit bestimmen lässt. Die unmittelbar aus den Messwerten berechnete Formabweichung stellt damit eine grobe Abschätzung nach oben dar.

## 9 Zusammenfassung

Das ursprüngliche Ziel der Filterung war die Trennung von zufälligen und systematischen Messwertanteilen. Durch die heute übliche Filterung mit festgelegten Grenzwellenlängen werden jedoch auch systematische Messwertanteile abgeschnitten, so dass Informationen über die Oberfläche verloren gehen können.

Bei jeder Messung sind zunächst die zufälligen und systematischen Messwertanteile durch objektive Testverfahren voneinander zu trennen. Praktisch können dazu alle bekannten Filter eingesetzt werden, allerdings mit variablen Wellenlängen. Das Splinefilter kommt dabei gegenüber dem Gaußfilter ohne Vor- und Nachlaufstrecken bzw. Profilverzerrungen an den Enden aus und kann auch für ungleichabständige Messwerte angewendet werden.

Der zufällige Messwertanteil enthält nicht nur die Streuung der Messeinrichtung, sondern auch die Streuung aufgrund der mehr oder weniger dichten punktwisen Erfassung der Oberfläche. Er ist damit ein Maß für die Güte dieser Erfas-

sung, was sich in entsprechenden Messunsicherheiten der mittleren Profile niederschlägt.

Die tiefpassgefilterten mittleren Profile als systematische Messwertanteile beschreiben den mittleren Verlauf der Oberfläche. Von ihnen werden zugeordnete Geometrielemente und weitere Messergebnisse wie Maß-, Form- und Lageabweichungen abgeleitet, für die sich dann ebenfalls Messunsicherheiten angeben lassen.

### Anhang: Berechnung des Splinepolynoms und seiner Messunsicherheit

In [9] wird die Berechnung des kubischen Splinepolynoms  $s_k(x)$  nach Gleichung (4) für den allgemeinen Fall ungleichabständiger Messwerte angegeben. Für nicht periodische Profile wird der natürliche Ausgleichsspline berechnet, bei dem die zweiten Randableitungen verschwinden. Durch die Wahl geeigneter Gewichte kann die Annäherung des Splines an die Messwerte gesteuert werden. Sind die Gewichte sehr groß, werden die Messwerte interpoliert, sind sie nahe null, ergibt sich die Ausgleichsgerade für das Minimum der Fehlerquadratsumme.

Bei der Ableitung in [4] für gleichabständige Messwerte wird diese Aufgabe von einem Parameter  $p$  übernommen, der sich wiederum in Abhängigkeit von der Grenzwellenlänge  $\lambda_c$  und dem Messpunktabstand  $\Delta x$  ergibt [5]:

$$p = \left( 2 \sin \frac{\pi \Delta x}{\lambda_c} \right)^4 \quad (\text{A1})$$

Man erhält das fünfdiagonale lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{M} \mathbf{w} = \mathbf{v} \quad (\text{A2})$$

Die Koeffizienten in den Diagonalen der symmetrischen, positiv definiten Pentadiagonalmatrix  $\mathbf{M}$  sowie der Vektor  $\mathbf{v}$  der rechten Seite des Gleichungssystems berechnen sich dann für ungleichabständige Messwerte wie folgt:

$$m_{1,k} = \frac{p}{3} \cdot \frac{h_{k+2} + h_k}{\Delta x_m} + \frac{2\Delta x_m^2}{h_k^2} + \frac{2\Delta x_m^2}{h_k h_{k+1}} + \frac{2\Delta x_m^2}{h_{k+1}^2} \quad (\text{A3})$$

mit

$$k = 1 \dots n - 2$$

$$m_{2,k} = \frac{p}{6} \cdot \frac{h_{k+1}}{\Delta x_m} - \frac{\Delta x_m^2}{h_{k+1}} \left( \frac{1}{h_k} + \frac{2}{h_{k+1}} + \frac{1}{h_{k+2}} \right) \quad (\text{A4})$$

mit

$$k = 1 \dots n - 3$$

$$m_{3,k} = \frac{\Delta x_m^2}{h_{k+1} h_{k+2}} \quad (\text{A5})$$

mit

$$k = 1 \dots n - 4$$

$$v_k = \Delta x_m \left( \frac{y_{k+2} - y_{k+1}}{h_{k+1}} - \frac{y_{k+1} - y_k}{h_k} \right) \quad (\text{A6})$$

mit

$$k = 1 \dots n - 2$$

Dabei sind die  $h_k$  der Abstand zwischen je zwei benachbarten Messwerten und  $\Delta x_m$  ihr mittlerer Abstand:

$$h_k = x_{k+1} - x_k \quad \text{für } k = 1 \dots n - 1 \quad (\text{A7})$$

und

$$\Delta x_m = \frac{x_n - x_1}{n - 1}$$

Der mittlere Abstand wird auch für  $\Delta x$  in Gleichung (A1) eingesetzt. Sind die Messwerte gleichabständig, erhält man wieder das in [4] angegebene Gleichungssystem. Dieses lässt sich schnell und einfach z.B. nach [9] lösen. Die Koeffizienten  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  und  $d_k$  für die Gleichung (4) werden nach [4] oder [9] berechnet. Da sie aus denselben Lösungen  $w_k$  des Gleichungssystems berechnet werden, sind sie miteinander korreliert. Deshalb werden sie zur Ableitung der Messunsicherheit zweckmäßig als Funktion der Elemente  $w_k$  des Lösungsvektors  $\mathbf{w}$  dargestellt. Dann ergibt sich der Funktionswert  $s_k(x)$  des Splines aus Gleichung (4) zu:

$$s_k(x) = y_k + (y_{k+1} - y_k) \frac{x - x_k}{\Delta x_m} + A_{1,k} w_{k-2} + A_{2,k} w_{k-1} + A_{3,k} w_k + A_{4,k} w_{k+1} \quad (\text{A8})$$

für

$$k = 1 \dots n - 1 \quad \text{mit } s_n(x) = y_n - w_{n-2}$$

mit den Abkürzungen

$$A_{1,k} = \frac{\Delta x_m}{h_{k-1}} \left( \frac{x - x_k}{h_k} - 1 \right) \quad (\text{A9})$$

mit

$$A_{1,1} = 0 \quad \text{und} \quad A_{1,2} = 0$$

$$A_{2,k} = \frac{\Delta x_m}{h_{k-1}} + \frac{\Delta x_m}{h_k} - \frac{\Delta x_m (x - x_k)}{h_k} \left( \frac{1}{h_{k-1}} + \frac{2}{h_k} \right) + \frac{p}{6} \cdot \frac{x - x_k}{\Delta x_m^2} \left( 2h_k - 3(x - x_k) + \frac{(x - x_k)^2}{h_k} \right) \quad (\text{A10})$$

mit

$$A_{2,1} = 0$$

$$A_{3,k} = -\frac{\Delta x_m}{h_k} + \frac{\Delta x_m (x - x_k)}{h_k} \left( \frac{2}{h_k} + \frac{1}{h_{k+1}} \right) - \frac{p}{6} \cdot \frac{x - x_k}{\Delta x_m^2} \left( h_k - \frac{(x - x_k)^2}{h_k} \right) \quad (\text{A11})$$

mit

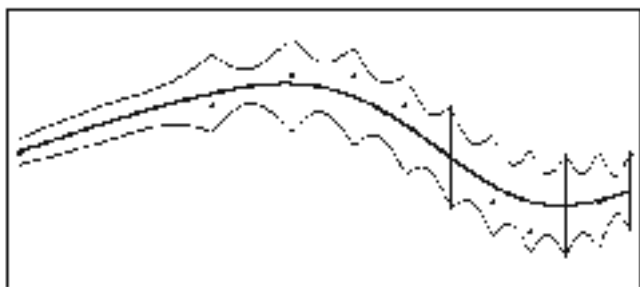
$$A_{3,n-1} = 0$$

$$A_{4,k} = \frac{-\Delta x_m (x - x_k)}{h_k h_{k+1}} \quad (\text{A12})$$

mit

$$A_{4,n-2} = 0 \quad \text{und} \quad A_{4,n-1} = 0$$

Die Varianz  $\sigma_{sk}^2(x)$  des Splines an einer beliebigen Stelle  $x$  lässt sich jetzt recht einfach durch Anwendung des allgemeinen Fortpflanzungsgesetzes der Messabweichungen



**Bild A1:** Natürlicher kubischer Spline mit ungleichabständigen Messwerten und Vertrauensbereich.

auf Gleichung (A8) ableiten und mit den obigen Abkürzungen wie folgt angeben:

$$\sigma_{sk}^2(x) = \sum_{j=1}^4 A_{j,k}^2 \sigma_{w,k+j-3}^2 + 2 \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{l=j+1}^4 A_{j,k} A_{l,k} \sigma_{w,k+j-3,k+l-3} \right) \quad (\text{A13})$$

mit

$$k = 1 \dots n - 1, \quad 1 \leq k + j - 3 \leq n - 2$$

und

$$\sigma_{sn}^2(x) = A_{1,n}^2 \sigma_{w,n-2}^2$$

Die Varianzen  $\sigma_{w,j}^2$  und Kovarianzen  $\sigma_{w,j,l}$  ( $j \neq l$ ) der Lösungen  $w_j$  ergeben sich z.B. nach [11] mit der Varianz  $\sigma^2$  der Abweichungen der einzelnen Messpunkte vom Ausgleichspline als Elemente der Kovarianzmatrix  $S_w$ :

$$S_w = M^{-1} \sigma^2 \quad (\text{A14})$$

Mit der Reststreuung  $s_r$  nach Gleichung (11) erhält man die Schätzwerte für die Varianzen  $s_{w,j}^2$  und Kovarianzen  $s_{w,j,l}$  ( $j \neq l$ ) der Lösungen  $w_j$  analog zu Gleichung (A14) sowie die Varianz  $s_{sk}^2(x)$  des Splines analog zu Gleichung (A13). Die Standardunsicherheit ergibt sich schließlich als Wurzel aus der Varianz:

$$u_{sk}(x) = \sqrt{s_{sk}^2(x)} \quad (\text{A15})$$

Ein Beispiel für den Vertrauensbereich eines Splines mit ungleichabständigen Stützstellen zeigt das Bild A1.

## Literatur

- [1] ISO 3274 (1996): Geometrical Product Specifications (GPS) – Surface texture: Profile method – Nominal characteristics of contact (stylus) instruments.
- [2] ISO 4287 (1997): Geometrical Product Specifications (GPS) – Surface texture: Profile method – Terms, definitions and surface texture parameters.

- [3] ISO 11562 (1996): Geometrical Product Specifications (GPS) – Surface texture: Profile method – Metrological characteristics of phase correct filters.
- [4] Krystek, M.: Formfilterung durch Splines. IX. Internationales Oberflächenkolloquium, Chemnitz 1996, Vortragsband S. 67–78.
- [5] Krystek, M.: Verschiedene, in Diskussion befindliche Filterverfahren zur Formmessung. DIN-Tagung Geometrische Produktspezifikation und -prüfung (GPS), Erlangen 1997.
- [6] ISO 12780-2 (1999): Geometrical Product Specifications (GPS) – Straightness – Part 2: Rules and procedures for the assessment of deviations.
- [7] Krystek, M.: Einfluss des Wellenfilters auf die Unsicherheit eines Messergebnisses bei Rauheitsmessungen. DIN-Tagung GPS '99 Geometrische Produktspezifikation und -prüfung, Mainz 1999.
- [8] Lotze, W.: Besonderheiten der phasentreuen Profilfilterung in der Längenmesstechnik. tm Technisches Messen 65 (1998) 4, S. 154–161.
- [9] Engeln-Müllges, G.; Reutter, F.: Numerik-Algorithmen. VDI-Verlag Düsseldorf 1996 (ISBN 3-540-62170-9).
- [10] Lotze, W.: High-Speed-Scanning auf Koordinatenmessgeräten. Microtecnic (1993) 4, S. 4–10.
- [11] DIN 1319 Teil 4 (1999): Grundlagen der Messtechnik; Teil 4: Auswertung von Messungen; Messunsicherheit.
- [12] Täubert, P.: Abschätzung der Genauigkeit von Messergebnissen. Verlag Technik, Berlin 1985.
- [13] Rasch, D.: Einführung in die mathematische Statistik, Band II. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1976.
- [14] Hernla, M.: Abschätzung der Messunsicherheit bei Koordinatenmessungen unter den Bedingungen der industriellen Fertigung. VDI-Fortschrittberichte Reihe 2, Nr. 274, VDI-Verlag Düsseldorf, 1992.
- [15] Hernla, M.: Die Unsicherheit von angrenzenden Formelementen. Qualität und Zuverlässigkeit, München 38 (1993) 6, S. 373–378.
- [16] Hernla, M.: Auswertung gemessener Oberflächenprofile. IX. Internationales Oberflächenkolloquium, Chemnitz 1996, Vortragsband S. 57–66.
- [17] Hernla, M.: Aufgabenspezifische Messunsicherheit bei Koordinatenmessungen. Technisches Messen 64 (1997) 7/8, S. 286–293.
- [18] Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen. Beuth Verlag Berlin 1995.
- [19] ISO EN ISO 14660-1 (Entwurf 1997): Geometrische Produktspezifikationen (GPS); Geometrielemente; Teil 1: Grundbegriffe und Definitionen.

Dr.-Ing. Michael Hernla, Liebigstraße 48, D-44139 Dortmund